22/3/16

<u>Ολοκληρώματα κίνησης</u>
(Ενέργεια και η σύνδεση με τους νόμους του Newton).
Γνωρίζουμε ήδη ότι κατά τη διάρκεια της κίνησης ενός υλικού σημείου και κάτω από σαφείς προϋποθέσεις, κάποιες ποσότητες μπορεί να διατηρούνται <u>π.χ</u> ορμή, ενέργεια κ.τ.λ
Ο 2ος Ν.Ν σε καρτεσιανές συντεταγμένες γράφεται σε μορφή συνιστωσών ως εξής: $m\ddot{x} = F_x$, $m\ddot{y} = F_y$, $m\ddot{z} = F_z$ όπου διάνυσμα θέσης $\vec{x} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ και η δύναμη $\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}$.
Αντίστοιχα για την ορμή ξέρουμε $P_x = m\dot{x}$, $P_y = m\dot{y}$, $P_z = m\dot{z}$ ενώ για την στροφορμή $L_x = m(y\dot{z} - \dot{y}z)$, $L_y = m(z\dot{x} - \dot{z}x)$, $L_z = m(x\dot{y} - \dot{x}y)$. Αντίστοιχα για την ενέργεια:
$\frac{1}{2}(m\dot{x}^2 + m\dot{y}^2 + m\dot{z}^2) + V(x,y,z) = E$, είναι οι ποσότητες που θα αποκαλούμε και ολοκληρώματα κίνησης. Θεωρούμε κίνηση μόνο κατά τον άξονα x. Δηλαδή: $\vec{F} = F(x)\hat{i}$, εφόσον η κίνηση είναι μονοδιάστατη είναι σίγουρα αστρόβιλη και βέβαια συντηρητική. Από το νόμο του Νεύτωνα ξέρω ότι $m\ddot{x} = F(x) = -\frac{dV}{dx}$ *(Πριν ολοκληρώσω πολλ/ζω $-\frac{dV}{dx} \times \dot{x}$)

?

Πεδίο συντηρητικό (μονοδιάστατη κίνηση)

Ολοκληρώνω: $\int m\dot{x}\ddot{x}\,dt = -\int \frac{dV}{dx}\dot{x}\,dt$

$m\int \dot{x}\ddot{x}\,dt = -\int \frac{dV}{dx}\dot{x}\,dt$

$\dot{x} = u$

$du = \ddot{x}\,dt$

άρα: $m\int u\,du = -\int dV \Rightarrow \frac{1}{2}mu^2 = -V+E$. Δηλαδή: $\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) = E$.

Άρα ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα $\Rightarrow$ Α.Δ.Ε

Επίσης ξεκινώντας από την Α.Δ.Ε, δηλαδή $\frac{1}{2}m(\dot{x})^2 + V(x) = E$

παραγωγίζω: (ως προς t) $\frac{1}{2}m2\dot{x}\ddot{x} + \frac{dV}{dt} = 0 \Rightarrow$

$m\dot{x}\ddot{x} = -\frac{dV}{dt} = -\frac{dV}{dx}\dot{x} \Rightarrow m\ddot{x} = -\frac{dV}{dx} = F(x)$.

Επομένως έχω ισοδυναμία 2ος Ν.Ν $\Leftrightarrow$ Α.Δ.Ε

Εξισώσεις Αναλλοίωτες σε Μετασχηματισμούς (Συμμετρίες)

Ας υποθέσουμε ότι ο ρυθμός αύξησης ενός πληθυσμού περιγράφεται από την παρακάτω διαφορική εξίσωση: $\frac{dN}{dt} = aN - bN^2$

$N = N(t)$ ο πληθυσμός για κάθε χρονική στιγμή t.

Η διαφορική εξίσωση είναι αναλλοίωτη στον μετασχηματισμό $t \to t+t_0$. Πράγματι αν $\tau = t+t_0$:

$\frac{dN}{d\tau} = \frac{dN}{dt}\frac{dt}{d\tau} \Rightarrow \frac{dN}{d\tau} = \frac{dN}{dt}$, η διαφορική εξίσωση αυτή είναι αναλλοίωτη στη χρονική μετάθεση. Αν όμως $\tau = -t$ τότε $\frac{dN}{d\tau} = -\frac{dN}{dt}$ η εξίσωση αλλάζει πρόσημο και δεν παραμένει αναλλοίωτη ως προς την αναστροφή του χρόνου.

Επανερχόμαστε στο Νόμο του Νεύτωνα. Δηλαδή:

$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2}$, $t \to -t$

$\Downarrow$

$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2}$, η εξίσωση παραμένει αναλλοίωτη καθώς για $\tau = -t$ έχουμε $\left(\frac{d}{d\tau}\right)^2 = \left(-\frac{d}{dt}\right)^2$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι ο 2ος Ν.Ν παραμένει αναλλοίωτος

σε χρονική αναστροφή και αυτό σημαίνει δύο πράγματα:
1) Όλα τα μηχανικά συστήματα που εξελίσσονται βάση αυτού του νόμου δεν μπορούν να ορίσουν χρονική κατεύθυνση.
2) Αν λύσουμε την εξίσωση του Νεύτωνα μπορούμε να προβλέψουμε εξίσου καλά το μέλλον ενός συστήματος και το παρελθόν του όσο μακρινά και αν είναι αυτά. Για παράδειγμα, μπορούμε να προβλέψουμε τις θέσεις των πλανητών στο μακρινό παρελθόν. Κατά τον ίδιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι ο Νόμος του Νεύτωνα είναι αναλλοίωτος σε χρονικές μεταθέσεις, δηλαδή $t \to t+t_0$, γεγονός που αντιστοιχεί στην ομογένεια του χρόνου. Δηλαδή όλες οι χρονικές στιγμές είναι ισοδύναμες. Θα χρησιμοποιούμε την ορολογία της συμμετρίας για να εκφράσουμε τα αναλλοίωτα, δηλαδή μια ποσότητα είναι συμμετρική ως προς ένα μετασχηματισμό, π.χ μετάθεση ή αναστροφή του χρόνου, αν μετά την δράση του μετασχηματισμού ο νόμος ή η ποσότητα παραμένει σταθερή ή αναλλοίωτη. Τέλος, η διανυσματική διατύπωση του 2ου Ν.Ν κρύβει ακόμα μια συμμετρία, ότι όλες οι διευθύνσεις του χώρου είναι ισοδύναμες, δηλαδή ο χώρος είναι ισότροπος.

Κατασκευή του νόμου του Νεύτωνα από συμμετρίες

Γνωρίζουμε από παρατηρήσεις δηλαδή από πειραματικά δεδομένα ότι η αρχική ταχύτητα και θέση ενός σωματιδίου καθορίζουν πλήρως την τροχιά του. Δηλαδή, αυτό σημαίνει ότι η θέση και η χρονική τους παράγωγος καθορίζουν πλήρως και αρκούν για την περιγραφή της κίνησης ενός σωματιδίου σε ένα πεδίο δυνάμεων. Δηλαδή οι μεταβολές της θέσης και της ταχύτητας θα ορίζουν την διαφορική εξίσωση που περιγράφει την τροχιά του σωματιδίου.

$$F = a(x,\dot{x},t)\,\ddot{x} + \underbrace{b(x,\dot{x},t)}_{}\,\dot{x} + \underbrace{c(x,\dot{x},t)}_{}$$

a, b, c κάποιες συναρτήσεις των $x, \dot{x}, t$.
Επί της ουσίας το F θα είναι πάντα: $f = a(x,\dot{x},t)\ddot{x} + d(x,\dot{x},t$

Ο σκοπός μας, να προσδιορίσουμε τις συναρτήσεις a, d.
Από το πρώτο νόμο του Νεύτωνα γνωρίζουμε ότι αν $F=0$ τότε το σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα ή παραμένει ακίνητο. Άρα, αν $F=0 \Rightarrow \ddot{x} = \frac{d(\dot{x})}{dt} = 0$
Δηλαδή $d(x,\dot{x},t)=0$.
Εφαρμόζω την ομογένεια χώρου και χρόνου. Δηλαδή την ισοδυναμία μεταξύ δύο σημείων του χώρου και δύο σημείων του χρόνου. Αν $x \to x+x_0$, $t \to t+t_0$ η εξίσωση πρέπει να έχει συμμετρία. $F = a(x,\dot{x},t)\ddot{x}$ και επιπλέον να ικανοποιήσει τις παραπάνω συμμετρίες. Δηλαδή θα πρέπει να είναι ίσο με $a(x+x_0, \dot{x}, t+t_0)\ddot{x}$, η μόνη περίπτωση να μην αλλάξει θα είναι να έχουμε τη συνάρτηση $a(\dot{x})\ddot{x}$. Άρα λοιπόν θα έχουμε $F=a(\dot{x})\ddot{x}$

Παρατήρηση
Η αρχή της Γαλιλαϊκής σχετικότητας.
Όλα τα μηχανικά συστήματα έχουν την ίδια συμπεριφορά όταν βρίσκονται σε σύστημα αναφοράς που κινείται με σταθερή ταχύτητα ως προς άλλο σύστημα αναφοράς.
Ζητάμε ο νόμος του Νεύτωνα να υπακούει την Γαλιλαϊκή συμμετρία, δηλαδή να είναι αναλλοίωτος στο μετασχηματισμό $x'=x-vt$. Η μόνη περίπτωση για την συνάρτηση που σέβεται την συμμετρία είναι $a(\dot{x})=$σταθερή (Γιατί? Απαντ
Την σταθερά a την ονομάζω μάζα και τελικά $F=m\ddot{x}$ έχω τον νόμο του Νεύτωνα αποκλειστικά από συμμετρίες.

Δυνάμεις που εξαρτώνται από το χρόνο (χρονοεξαρτημένες δυνάμεις)
Δηλαδή $F=F(t)$ μόνο συνάρτηση του χρόνου όχι του χώρου.
Αν σε ένα υλικό σημείο ασκούνται δυνάμεις που εξαρτώνται αποκλειστικά από το χρόνο, είναι προτιμότερο να γράφουμε τον 2ο Ν.Ν στην μορφή των ταχυτήτων, δηλαδή:
$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} = m\frac{du}{dt} \Rightarrow m\frac{du}{dt} = F(t) \Rightarrow du = \frac{1}{m}F(t)dt \Rightarrow$$

$\Rightarrow v - v_0 = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{m} F(t')dt'$. Αντίστοιχα γνωρίζοντας την ταχύτητα $\frac{dx}{dt} = v \Rightarrow x - x_0 = \int_{t_0}^{t} v\,dt'$

Δυνάμεις που εξαρτώνται από την ταχύτητα
Για δυνάμεις που περιγράφονται ως συναρτήσεις της ταχύτητας και μόνο $F = F(\dot{x}) = F(v)$, π.χ τριβές στον αέρα. Για δυνάμεις αυτής της μορφής γράφουμε το Ν.Ν στη μορφή των ταχυτήτων, δηλαδή:
$F = F(v) = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{1}{m} F(v) \Rightarrow \frac{dv}{F(v)} = \frac{dt}{m}$

Παρατήρηση
Θα χρησιμοποιήσουμε το χρόνο ως συνάρτηση της ταχύτητας δηλαδή αντίστροφες συναρτήσεις.

Δυνάμεις που εξαρτώνται μόνο από την θέση
$F=F(x)$. Αντιστοιχούμε την δύναμη στο δυναμικό $V(x)$ ως $F = -\frac{dV}{dx}$ και χρησιμοποιούμε την Α.Δ.Ε: $\frac{1}{2}m(\dot{x})^2 + V(x) = E$

Παράδειγμα
Η πτώση με αλεξίπτωτο. Στην πτώση με αλεξίπτωτο (θα την λύσουμε αναλυτικότερα παρακάτω) ο λόγος που επιβραδύνει ο αλεξιπτωτιστής οφείλεται στις τριβές που είναι ανάλογες της ταχύτητάς του. Με αποτέλεσμα να πέφτει στο έδαφος με σταθερή ταχύτητα. Η ταχύτητά του εξαρτάται από τη μάζα και το συντελεστή των τριβών, δηλαδή το είδος του αλεξίπτωτου.